



**دیرستان غیر دولتی علمی**

**(دوره اول)**

**جزوہ ریاضی پایہ ہفتم**

**کلاس های تابستانی**

## سرفصل ها:

### مقدمه

۱. مجموعه اعداد ← الف) اعداد طبیعی

ب) اعداد حسابی

ج) اعداد صحیح

د) اعداد اول و مرکب

ه) چهار عمل اصلی در اعداد صحیح

۲. بردار و مختصات ← الف) دستگاه محورهای مختصات

ب) بردار و مختصات آن

۳. اعداد گویا ← الف) ب. م. م

ب) ک. م. م

ج) هم مخرج کردن

د) چهار عمل اصلی

۴. حجم و سطح

الف) حجم های منشوری و استوانه

ب) محاسبه حجم های منشوری

ج) مساحت جانبی و کل

د) فرمول های مساحت و محیط و حجم

۵. راهبردهای حل مسئله

## سخنی با خدا به زبان ریاضی

خدایا! شکر که تو را حدی برایت متصور نیست. سپاس تو را که بی نهایت مهربانی و بی شمار پاک. خدایا! حمد و سپاس از آن توست که محیطی بر تمام عالم و تو تکیه گاهی بر تمام موجودات. خدایا! می خواهم از ۱۰۰ درصد زندگی، تو آن را پر کنی؛ وقتی تقسیم می شوم، تو باشی؛ وقتی جمع می شوم، تو شوی و آن گاه که مرا ضرب می کنند، حاصل آن تو، یعنی بی نهایت، باشی اما مبادا آن لحظه که منهای تو باشم.

خداوند! آن روز را برسان که روح و جسم در تقارن هم و موازی دستورات تو باشد. پروردگارا! مرا کمک کن، قلبم و جانم آن قدر وسیع شود که هکتار هکتار آن را بذر دوستی بکارم و مهربانی درو کنم.

خداوند! تمام اعمال نیکم را به توان  $n$  برسان تا آن ها را هدیه کنم به ساحت  $۸+۶$  تنی که گل وجودم از آن ها سرشته شده است.

خدایا! من چون مثلی هستم که می خواهم زاویه کارهایم قائم به وتری باشد که نام تو بر تارک آن نقش بسته باشد.

خدایا! مرا ببخشای و در هر دایره زندگی مرا حیران خودت کن!

## پاسخ امام علی (ع) به سوال ریاضی یک یهودی

مرد یهودی نزد امیرالمؤمنین علی بن ابیطالب (ع) آمد و گفت: عددی را برای من نام ببر که نصف و یک سوم و یک چهارم و یک پنجم و یک ششم و یک هفتم و یک هشتم و یک نهم و یک دهم آن صحیح باشد و حاصل کسری نداشته باشد؟

حضرت (ع) فرمود: اگر برای تو نام ببرم مسلمان می شوی؟! گفت: بله! حضرت (ع) فرمود: عدد هفتهات را در عدد سالت ضرب کن. وقتی یهودی عدد ۷ را در ۳۶۰ ضرب کرد و دید مسأله درست است، ایمان آورد. (شرح خلاصه الحساب، شیخ بهاءالدین عاملی)

نکته: حاصل ضرب عدد ۷ در عدد ۳۶۰، ۲۵۲۰ می شود که نصف آن ۱۲۶۰، یک سوم آن ۸۴۰، یک چهارم آن ۶۳۰، یک پنجم آن ۵۰۴، یک ششم آن ۴۲۰، یک هفتم آن ۳۶۰، یک هشتم آن ۳۱۵، یک نهم آن ۲۸۰ و در نهایت یک دهم این عدد ۲۵۲ می شود.

## ریاضی و شعر

زندگی «مجدور» آینه است.      زندگی گل به «توان» ابدیست.

زندگی «ضرب» زمین در ضربان دل ماست.      زندگی «هندسه» ساده و یکسان نفس های ماست.

## ریاضی و قرآن

- (۱) اولین آیه قرآن «بسم الله الرحمن الرحيم» دارای ۱۹ حرف عربی است.
- (۲) قرآن مجید از ۱۱۴ سوره تشکیل شده است و این عدد به ۱۹ قسمت است. (۱۹×۶)
- (۳) اولین سوره که نازل شده است سوره علق نوزدهمین سوره از آخر قرآن است.
- (۴) سوره علق ۱۹ آیه دارد.
- (۵) سوره علق ۲۸۵ حرف (۱۹×۱۵) دارد.
- (۶) اولین بار که جبرئیل امین با قرآن فرود آمد ۵ آیه اولی سوره علق آورد که شامل ۱۹ کلمه است.
- (۷) این ۱۹ کلمه، ۷۶ حرف (۱۹×۴) دارد که به تعداد حروف بسم الله الرحمن الرحيم است.
- (۸) دومین باری که حضرت جبرئیل فرود آمد ۹ آیه اولی سوره قلم را آورد که شامل ۳۸ کلمه است. (۱۹×۲)
- (۹) سومین باری که حضرت جبرئیل فرود آمد ۱۰ آیه اولی سوره مزمل را آورد که شامل ۵۷ کلمه است. (۱۹×۳)
- (۱۰) چهارمین بار که حضرت جبرئیل فرود آمد ۳۰ آیه سوره مدثر را آورد که آیه ۳۰ ام آن «و بر آن (دوزخ) ۱۹ (نگهبان) است» می باشد.
- (۱۱) هر کلمه از جمله آغازیه قرآن (بسم الله الرحمن الرحيم) در تمام قرآن به نحوی تکرار شده که به عدد ۱۹ قابل تقسیم است. بدین ترتیب که کلمه اسم ۱۹ بار کلمه الله ۲۶۹۸ بار (۱۹×۴۲) کلمه الرحمن ۵۷ بار (۱۹×۳) و کلمه الرحيم ۱۱۴ بار (۱۹×۶) دیده می شود.
- (۱۲) قرآن مجید شامل اعداد بی شماری است. مثلاً ما موسی را برای چهل شب احضار کردیم، ما هفت آسمان را آفریدیم. شمار این اعداد در تمام قرآن ۳۸۵ (۱۹×۱۵) می باشد.
- (۱۳) سوره قاف که با حرف ق شروع می شود شامل ۵۷ (۱۹×۳) حروف ق است.
- (۱۴) سوره دیگری در قرآن حروف ق را با علام رمزی خود دارد (سوره شورا) که اگر حروف ق را در این سوره شمارش نمائید ملاحظه خواهید کرد که حرف ق ۵۷ (۱۹×۳) بار تکرار شده است.
- (۱۵) بدین ترتیب در می یابید که دو سوره قرآنی فوق الذکر به اندازه همدیگر (۵۷، ۵۷) شامل حرف ق هستند که مجموع آن دو با تعداد سوره های قرآن (۱۱۴) برابر است.
- (۱۶) تنها سوره ای که با حرف «ن» آغاز می شود سوره قلم است. این سوره ۱۳۳ «ن» دارد که به ۱۹ قابل قسمت است. (۱۹×۷)
- (۱۷) سه سوره اعراف و مریم و ص که با حروف (ص) شروع می شوند جمعا ۱۵۲ حرف «ص» دارند. (۱۹×۸)

۱۸) در سوره طه جمع تعداد حروف «ط» و «ه» ۳۴۲ می باشد. (۱۸×۱۹)

۱۹) در سوره «یس» تعداد حروف «ی» و «س» ۲۸۵ می باشد. (۱۵×۱۹)

۲۰) در سوره رعد که با حرف رمزی «المرا» آغاز می شود، تعداد حروف (الف، لام، میم، راء) ۱۵۰۱ مورد می باشد. (۱۹×۷۹) (۱)

(۱) مقاله قرآن و کامپیوتر نوشته «دکتر رشاد خلیفه» دانشمند مسلمان مصری

### ریاضی و پزشکی:

۱) در مورد کاربرد ریاضی در پزشکی می توان گفت که: مثلا فکرش را بکنید که دکتر داروسازی نسبت ریختن مواد در ساخت دارو ها را نتواند انجام دهد. فقط فکرش، پشت آدم را می لرزاند!!! یا فکرش را بکنید یک دکتر نتواند حتی نسخه بپیچد و یا حتی نتواند پولی را که از بیمار می گیرد بشمرد. ( چقدر برای دکتر ها وحشتناک است!!) ولی از شوخی گذشته برای یک دکتر هم واژه هایی مثل فشار خون و یا قند خون بدون ریاضیات و اعداد و ارقام بی معنی است.

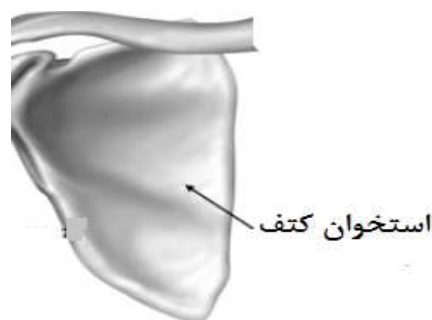
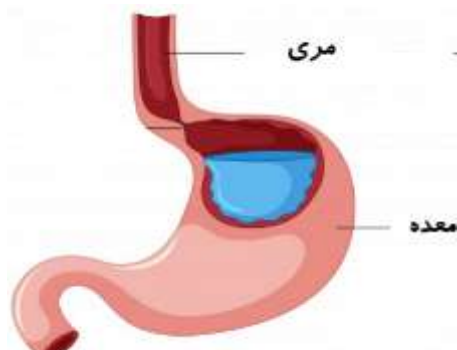
۲) از ترکیب علم سرطان شناسی و ریاضی می توان بیشترین شانس را برای شناسایی و تشخیص درمان های موثر در مبارزه با تومرها بدست آورد. در این روش با توسعه مدل های ریاضی خاصی با کمک شبیه سازی و تصویر سازی هندسی، به بررسی واکنش های میان سلولهای سرطانی، سیستم ایمنی و درمان های پزشکی سازگار پرداخته می شود.

۳) یکی از وظایف یک تکنسین آزمایشگاه طبی تعیین کردن تعداد سلول های سفید و قرمز در نمونه خون است. تعداد سلول های بیشتر یا کمتر از یک محدوده نرمال می تواند نشان دهنده وجود برخی از عفونت ها باشد. هنگامی که یک بیمار به دکتر مراجعه می کند یک راه برای تعیین عفونت (در صورت وجود) انجام شمارش تعداد سلول های سفید یا تعداد سلول های قرمز می باشد. تعداد زیاد سلول های سفید می تواند نشانه آپاندیس، سینه پهلوی، مننژیت، سرطان خون، ورم لوزه ها، آبله مرغان و ... و تعداد کم سلول های سفید می تواند نشانه سرخک، نوعی تیفوئید، آنفولانزا و ... باشد. از طرف دیگر تعداد کم سلول های قرمز می تواند نشانه خونریزی داخلی ناشناخته، کم خونی شدید و سوء عمل مغز استخوان باشد. تعداد زیاد سلول های قرمز می تواند موجب فشار خون بالا باشد. موارد ذکر شده نشان می دهد که شمارش صحیح سلول ها تا چه اندازه دارای اهمیت است.

۴) نقش زاویه در خلقت بدن انسان و فعالیت های جسمانی او. استخوان کتف بدن به صورت مثلثی است که یک زاویه ی حدود ۳۰ درجه، یک زاویه ی حدود ۶۰ درجه و زاویه ی دیگر آن حدود ۹۰ درجه است. استخوان کشک زانو زاویه ای حدود ۶۰ درجه دارد. روده ی بزرگ در ناحیه ی شکم به صورت مربع و با

زاویه های ۹۰ درجه قرار گرفته است. سر استخوان ران با زاویه ی ۴۵ درجه به لگن وصل می شود. نای با زاویه ی حدود ۳۰ درجه نسبت به خط وسط بدن وارد شش ها می شود. مری به معده تحت زاویه ی ۹۰ درجه متصل شده است.

افزایش استحکام استخوان بندی، تعادل حرکتی، افزایش قدرت (مانند عملکرد اهرم ها) حرکت سریع تر اعضا و اندام ها، ارتباط بهتر اعضا، تسهیل در انتقال مواد و انعطاف پذیری، از جمله مواردی هستند که نشان حکمت و تدبیر پروردگار در خلقت انسان دارد.



### استفاده از عدد پی در ساخت تخت جمشید

مهندسان هخامنشی راز استفاده از عدد پی (۳/۱۴) دو هزار و پانصد سال پیش کشف کرده بودند. آنها در ساخت سازه های سنگی و ستون های مجموعه تخت جمشید که دارای اشکال استوانه ای بودند، از این عدد استفاده می کردند. عدد پی در علم ریاضیات از مجموعه اعداد محسوب می شود. این عدد از تقسیم محیط دایره بر قطر آن به دست می آید. کشف عدد پی جزو مهمترین کشفیات در ریاضیات است.



## ریاضی و حشرات:

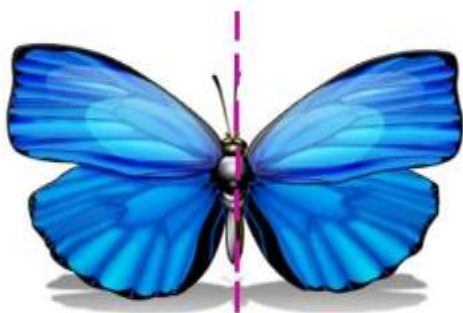
در بین حشرات، زنبور عسل حشره باهوشی است که از طریق علم هندسه، کندوی خود را می سازد و پس از آن عنکبوت که از روی نقوش هندسی، تار می بافت که البته بعدها دانشمندان به این نتیجه رسیدند که زنبور عسل تحت هر شرایطی می تواند نقش را جابه جا کرده و پرده ها را با تغییر سایز و زاویه باز هم هندسی بسازد در حالی که اگر تار پنج ضلعی اولیه عنکبوت به هر دلیلی پاره شود عنکبوت برای تعمیر آن قادر به ساخت مجدد آن گوشه یا ضلع نیست بلکه از روی غریزه تنها سوراخ تار را پر می کند.

زنبور عسل شهد شیرین و گوارایش را در خانه هایی که شش ضلعی هستند اندوخته می کند. او به خوبی می داند که با ساختن خانه هایش به این شکل در مصرف موم صرفه جویی می کند و فضای بیشتری را برای انبار آذوقه به دست می آورد و محاسبات ریاضی نیز این مطلب را تایید می کند.

هنگامی که یک عنکبوت می خواهد تار بتند، ابتدا یک مارپیچ راستگرد درست می کند. از این بافته ابتدا به عنوان پایه استفاده می کند و سپس هنگامی که کار بافتن تار تمام شد، آن را از بین می برد.

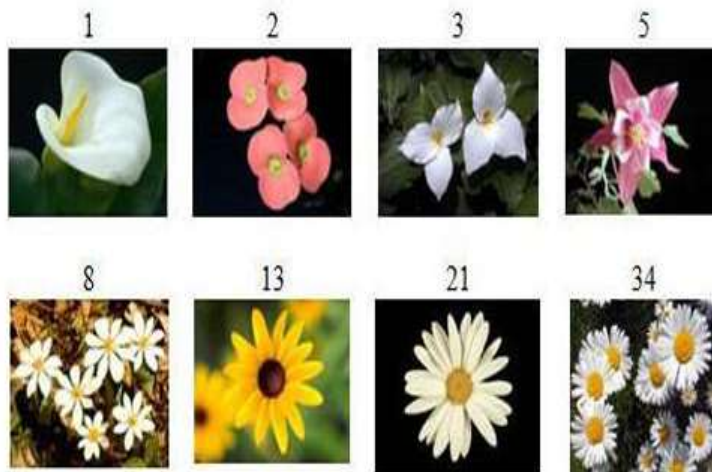
مسیری که پروانه ها به هنگام پرواز به سوی شعله طی می کنند، به شکل مارپیچ است. پروانه ها به علت چشم های مرکبی که دارند مستقیم به جلو نگاه نمی کنند. آنها با یک زاویه مشخص و معین به طرف شعله شمع حرکت کرده و مسیر پروازشان را در یک حرکت مارپیچ می کنند.

یکی از مهمترین ویژگی های ریاضی در طبیعت تقارن است. تقارن در یک موجود زنده تعادل و هماهنگی ایجاد می کند. تقارن کاملی که در بدن پروانه، فرم بدن انسان، شکل یک برگ درخت، زیبایی یک دایره و ساختمان موم عسل می بینیم، حکایت از تعادل ریاضی آنها دارد.



## ریاضی و گیاهان:

گیاه شناس در پی گیاه مورد نظر خود و زبان شناس در پی یافتن ریشه نامگذاری گیاه و داروشناس در جستجوی ویژگیهای درمانی آن است و ریاضیدان نحوه قرار گرفتن برگ و گلبرگها یا اندازه ها و شکل ها را مورد مطالعه قرار میدهد. در اکثر گیاهان تعداد ماریچ های مخروط کاج، آناناس، دانه های آفتاب گردان و تعداد گلبرگ ها از اعدادی به نام سری فیبوناچی پیروی می کنند که به صورت زیر است:  
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...



## ریاضی و هنر:

نقاشان و هنرمندان برای جان دادن به تصویرها و القای فضای سه بعدی به آثار خود، به ریاضیات روی آورند. بنابراین همه نقاشان، ریاضیدانانی هنرمند یا هنرمندانی ریاضیدان بودند.

## بعضی از کاربردهای ریاضی در زندگی روزمره

### (۱) آشپزی

برای تهیه یک غذای خوشمزه و لذت بخش برای دوستان، عزیزان، خانواده، اقوام یا مشتریان، می بایست مواد لازم را اندازه گیری کنید، تبدیل واحدها را از میلی لیتر به قاشق چای خوری، غذاخوری و فنجان بدانید. محاسبه زمان مورد نیاز برای پخت ماده غذایی و تنظیم درست آن را مورد توجه قرار دهید. درک نسبت ها و درصدها، مثلا نسبت ۱ به ۲ در دو ماده غذایی را رعایت کنید. یعنی در همه این موارد به نوعی از ریاضی کمک می گیرید.



## ۲) باغبانی

ریاضی در مراقبت از گیاهان نیز بسیار حیاتی است. فاصله بین دانه های جدید و همچنین تعداد گلدان های مورد نیاز از مواردی هستند که نیاز به اندازه گیری دارند. عدم دقت در اندازه گیری می تواند منجر به اسراف یا از بین رفتن گیاهان شما شود.

## ۳) مهمانی

سوال واقعی در هر مهمانی، ممکن است این باشد: چند نفر و چقدر؟ همه چیز باید دقیق اندازه گیری شود تا اطمینان حاصل شود که از همه مهمانان پذیرایی می شود و انتظارات آنها برآورده خواهد شد (حداقل نیمی از آنها). این که مهمانی از چه ساعتی شروع شود و تا چه زمانی ادامه پیدا کند نیز با ریاضیات در ارتباط است.

## ۴) دکوراسیون

در دکوراسیون خانه، اداره یا حتی یک فروشگاه، ما به صورت ناخودآگاه از ریاضی برای محاسبه و اندازه گیری فضایی که می خواهیم وسایلمان را در آن قرار دهیم استفاده می کنیم. مثلا ارتفاع و عرض پرده ها، مبلمان جدید و یا در رنگ آمیزی یک خانه یا آپارتمان برای این که بدانیم چه مقدار رنگ مورد نیاز است، در کاشی کردن حمام یا آشپزخانه برای آن که بدانیم چه تعداد کاشی لازم داریم و برای ترمیم کف یا سقف منزل برای این که بدانیم چه تعداد چوب نیاز داریم باید دست به دامان این علم پر کاربرد شویم.

## ۵) آمار

اگر آمار نبود، سازمان هایی مانند آژانس های دولتی نمی توانستند نیازهای مردم خود را اندازه گیری کنند و مشکلات آنها را برطرف کنند. اگر ریاضی نبود، شرکت های بازاریابی نمی دانستند مشتریان چه نیازها و خواسته هایی دارند و یا این که چگونه می توانند آنها را به خرید محصولات خود ترغیب کنند. شرکتها به کمک آمار و ارقام قادر به درک راه هایی هستند که می تواند بر مخاطبانشان تأثیر داشته باشد.

## ۶) خرید

به طور ناخودآگاه، وقتی مشغول محاسبه میزان پس انداز خود در هر خرید تخفیف دار از فروشگاه مورد علاقه مان می شویم، از ریاضی استفاده می کنیم. وقتی در ذهن خود به این فکر می کنید که خرید کدام محصول مقرون به صرفه است در حال استفاده از ریاضیات هستید.

## ۷) مسافرت

هر بار که به خارج از کشور سفر می کنید، نیاز به تبدیل ارز دارید. علاوه بر آن مدام سعی می کنید هزینه ها را با کشور خود مقایسه کنید، بنابراین از ریاضی استفاده می کنید. یکی دیگر از کاربردهای ریاضی در سفر تخمین مسافت ها است.

محاسبه مصرف سوخت در سفرهای جاده ای حیاتی است و بدون آن ممکن است در جاده بدون سوخت مانده و سفر ما بیش از آن چه برایش برنامه ریزی کرده ایم طول بکشد. از ریاضیات برای پرداخت عوارض، درک شماره های درج شده روی تابلوهای رانندگی، بررسی فشار لاستیک و غیره نیز استفاده می شود.

## ۸) تجارت

ریاضی در فروش و بازاریابی و عملکرد کلی یک تجارت کاربرد دارد. برای مثال شما به کمک ریاضی بر آورد می کنید که آیا هزینه های شرکت و حقوق کارمندان را در خواهید آورد یا نه!

## ۹) بودجه بندی

ما به کمک ریاضی می توانیم مبلغ مشخصی را که در هر روز هزینه می کنیم تعیین کنیم. اگر ریاضی نبود، ما نمی توانستیم بر آورد کنیم که چقدر برای حمل و نقل، غذا و موارد دیگر هزینه می کنیم.

## ۱۰) مدیریت زمان

ما همچنین برای اینکه بتوانیم از زندگی روزمره خود به طور مؤثر استفاده کنیم از ریاضی کمک می گیریم. از طریق مدیریت زمان مؤثر است که می توانیم پربازده باشیم و بسیاری از کارها را در عرض ۲۴ ساعت به پایان برسانیم. ما برای کار کردن با زمان، نه تنها اطلاع از وقت و دانستن زمان در ساعت آنالوگ و دیجیتال بلکه درباره ساعت جهانی، منطقه زمانی، تقویم ها و درک ارزش ساعاتی که می گذرانیم به ریاضی نیاز داریم.

## مجموعه های اعداد

### عدد

عدد یکی از مفاهیم پایه ریاضیات است. در آغاز عدد برای شمارش و اندازه گیری به کار می رفت ولی بعدها ریاضی دانان مفهوم آن را توسعه دادند و مفهوم عدد صفر و عدد منفی و عدد مختلط را ابداع کردند. عدد را نباید با رقم اشتباه کرد. رقم نشانه ای است که برای نوشتن عدد به کار می رود.

### تاریخ پیدایش عدد

در آغاز، عدد به صورت محدود خود بود. حتی عدد را تا ۲ بیشتر نمی توانستند بشمارند. برای عدد، مرزی برای شمارداشتند. برای نمونه، زمانی در بسیاری جاها، مرز شمار، عدد ۶ بود. تا ۶ می شمردند و پس از آن را می گفتند «بسیار». هنوز هم در بسیاری زبان ها «هفت» به معنای بسیار است. در زبان فارسی، ضرب المثلی است که می گوید: «هفت بار گز کن، یکبار پاره کن.» در این ضرب المثل، منظور دقیقا هفت بار عمل کردن نیست، بلکه منظور این است که پس از عمل «بسیار»، نتیجه بگیر. در زبان روسی نیز ضرب المثلی است به این مفهوم که «هفت نفر منتظر یک نفر نمی ماند» که باز هم منظور این است که تعداد زیادی منتظر یک نفر نمی ماند.

همچنین در داستان ها، وقتی از پادشاهی صحبت می شود که در قصریست که هفت برج و بارو دارد، و یا هفت سرزمین، هفت آسمان و ..... همه جا «هفت» به معنای بسیار به کار رفته است عدد سیزده نیز چنین سرنوشتی دارد. دوازده را «دوجین» می گفتند و چون پس از آن را نمی شناختند، روی آن نام «دوجین شیطانی» گذاشتند. از اینجا، عدد سیزده نحس شد، چرا که پس از دوازده برای آنها ناشناخته بود و خبر از ابهام و تاریکی می داد. البته پیش آمدها یا روایت هایی هم به نحسی سیزده کمک کرد؛ مانند روایتی که در شام آخر، نفر سیزدهم به عیسای مسیح خیانت کرد و او را لو داد، وگرنه عدد ۱۳ با عددهای دیگر هیچ تفاوتی ندارد. نمونه های دیگری هم از اینگونه، برای برخی عددها داریم. چهل چراغ به معنای درست ۴۰ چراغ نیست. هزار پا به معنای این نیست که این جانور ۱۰۰۰ پا دارد.

برخی عددها هم نشانه عدد شماری بوده است. دست، پنج انگشت دارد و اغلب چیزها را به یاری انگشتان دست و پا می شمردند. واژه پنج از پنجه گرفته شده است؛ زیرا پنجه دارای ۵ انگشت است. در زبان فارسی، واژه سی با واژه سه، هم ریشه است. همینطور چهل با چهار، پنجاه با پنج و ... ولی واژه بیست، هیچ ربطی به واژه «دو» ندارد. این نشانه آن است که عدد ۲۰ به معنای مجموعه انگشتان دست و پا است و در زمانهای دور، مبنای عدد شماری بوده است.

## اعداد طبیعی

اعدادی هستند که برای شمردن به کار می‌روند. مجموعه اعداد طبیعی  $\{1, 2, 3, \dots\}$  است. در این مجموعه عدد صفر وجود ندارد و با اضافه کردن آن، مجموعه اعداد حسابی به وجود می‌آید. این مجموعه یک مجموعه نامتناهی است.

در ریاضیات مجموعه اعداد طبیعی را با  $N$  نشان می‌دهند که این حرف از اول واژه انگلیسی Natural به معنای طبیعی گرفته شده است.

## اعداد حسابی

همان اعداد طبیعی هستند که صفر هم به آنها اضافه شده است. این مجموعه اعداد را با  $w$  نشان می‌دهند که حرف اول کلمه Whole به معنای حساب کردن است.

$$w = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

## اعداد صحیح

اعداد صحیح به مجموعه اعداد طبیعی، قرینه این اعداد و عدد صفر گفته می‌شود. به عبارت دیگر به مجموعه‌ی اعداد زیر، اعداد صحیح یا اعداد درست می‌گویند. در ریاضیات این مجموعه را با حرف  $Z$  حرف اول کلمه Zahlen نشان می‌دهند. همانند مجموعه اعداد طبیعی، مجموعه اعداد صحیح نیز یک مجموعه نامتناهی است.

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

شاخه‌ای از ریاضیات که به مطالعه در مورد ویژگی‌های اعداد صحیح می‌پردازد نظریه اعداد نام دارد. اعداد صحیح همانند اعداد طبیعی نسبت به اعمال جمع و ضرب بسته است، یعنی جمع و ضرب هر دو عدد صحیح، یک عدد صحیح است. و چون اعداد صحیح شامل اعداد منفی و صفر می‌باشند بنابراین بر خلاف اعداد طبیعی نسبت به عمل تفریق نیز بسته اند. ولی چون حاصل تقسیم دو عدد صحیح بر هم ممکن است عددی صحیح نباشد، پس نمی‌تواند نسبت به عمل تقسیم بسته باشد.

## اعداد اول و مرکب

**اعداد اول:** اعدادی طبیعی هستند که بر هیچ عددی بجز خودشان و عدد ۱ بخش پذیر نباشند. تنها استثنا عدد ۱ است که جزو این اعداد قرار نمی‌گیرد. اگر عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ اول نباشد مرکب است.  
**عدد مرکب:** هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک که بیش از دو شمارنده داشته باشد عدد مرکب است.

اعداد اول جزو یکی از معماهای ریاضی باقیمانده است و هنوز کسی فرمولی برای آنها به دست نیاورده است.

سری اعداد اول به این صورت شروع می‌شود: ... و ۱۹، ۱۷، ۱۳، ۱۱، ۷، ۵، ۳، ۲

**نکته ۱:** تنها عدد اولی که زوج است عدد ۲ است. پس تمام اعداد زوج به غیر از ۲ همه مرکب هستند.

**نکته ۲:** عدد ۱ نه اول است نه مرکب.

**تمرین ۱)** اعداد اول بین ۲۰ تا ۵۰ را بنویسید.

**تمرین ۲)** حاصل جمع دو عدد اول ۲۵ می‌باشد. آن دو عدد اول کدامند؟

### چهار عمل اصلی در اعداد صحیح

در دوره ابتدایی چهار عمل اصلی را در مورد اعداد طبیعی و حسابی یاد گرفتیم. در اینجا با چهار عمل اصلی در بین اعداد صحیح بیشتر آشنا می‌شویم.

**نکته:** هر عدد (غیر از صفر) که علامت نداشته باشد علامت آن مثبت است. مثال:  $۷ = +۷$

**نکته:** در محور اعداد صحیح هر چه به طرف راست (مثبت‌ها) حرکت کنیم عدد بزرگتر و هر چه به سمت چپ (منفی‌ها) حرکت کنیم عدد کوچکتر خواهد شد.

**تمرین:** علامت  $\langle = \rangle$  بگذارید.  $-۸ \circ -۴$      $+۵ \circ ۰$      $-۵۰ \circ -۱۲$

**قرینه اعداد صحیح:** هرگاه علامت عددی را تغییر دهیم قرینه آن عدد حاصل می‌شود. مانند

$-۱۲ \longrightarrow ۱۲$      $+۵ \longrightarrow -۵$

**نکته:** قرینه قرینه هر عدد با خود آن عدد برابر است.  $-۵ \longrightarrow +۵ \longrightarrow -۵$

**نکته:** اگر تعداد منفی‌های یک عدد زوج باشد علامت آن عدد مثبت و اگر تعداد منفی‌های یک عدد فرد باشد علامت آن عدد منفی خواهد بود. علامت مثبت قبل از پرانتز تأثیری ندارد.

**تمرین:** تساوی‌های روبه‌رو را کامل کنید.  $- \{ - [ - ( - ۲۲ ) ] \} =$      $- ( - ( - ( - ( - ۵ ) ) ) ) =$

## جمع اعداد صحیح

در جمع اعداد صحیح دو حالت پیش می آید:

**حالت اول:** هر دو عدد هم علامت هستند. یعنی هر دو منفی یا هر دو مثبت هستند که در این حالت آنها را با هم جمع می کنیم. سپس علامت یکی از آن دو عدد را قرار می دهیم.

**مثال:**

$$(+7) + (+5) = +12$$

$$(-4) + (-7) =$$

**حالت دوم:** دو عدد هم علامت نیستند. یعنی یکی منفی و دیگری مثبت است که باید آنها را از هم کم کرده سپس علامت عدد بزرگتر را قرار دهیم.

**مثال:**

$$(+9) + (-4) = +5$$

$$(-6) + (+2) =$$

## تفریق اعداد صحیح

برای تفریق اعداد صحیح می توانیم از دو روش استفاده کنیم:

**۱. روش اول: مختصر نویسی:**

در روش مختصر نویسی می توانیم علامت های مثبت اضافی (به جز به اضافه) و پرانتز و گروه ها حذف کنیم و علامتهای پشت سر هم (علامت هایی که عددی بین آنها نباشد) را در هم ضرب کنیم. مثال:

$$(-12) - (-37) = -12 + 37 = 25$$

**۲. روش دوم: تبدیل تفریق به جمع:**

در این روش تفریق را طبق فرمول زیر به جمع تبدیل می کنیم:

۱. عدد اول را بدون تغییر می نویسیم.

۲. تفریق را به جمع تبدیل می کنیم.

۳. قرینه عدد دوم را می نویسیم.

**مثال:**

$$(-16) - (+9) = (-16) + (-9) = -25$$

$$(-21) - (-17) =$$

## ضرب اعداد صحیح

در ضرب اعداد صحیح ابتدا علامت ها و سپس عددها را ضرب می کنیم.

**نکته:** حاصل ضرب عدد منفی در عددی مثبت، عددی منفی است.

**نکته:** حاصل ضرب عدد مثبت در عددی مثبت، عددی مثبت است.

**نکته:** حاصل ضرب عدد منفی در عددی منفی، عددی مثبت است.

**نکته:** حاصل ضرب عدد مثبت در عددی منفی، عددی منفی است.

**مثال:**

$$(+5) \times (+3) = +15$$

$$(+6) \times (-2) =$$

$$(-4) \times (-6) =$$

$$(-7) \times (+8) =$$

## تقسیم اعداد صحیح

در تقسیم اعداد صحیح مانند ضرب ابتدا علامت ها و سپس عددها را برهم تقسیم می کنیم.

**مثال:**

$$(-49) \div (-7) = +7$$

$$(+25) \div (-5) =$$

$$(-14) \div (+2) =$$

$$(+18) \div (+9) =$$

## خلاصه جمع و تفریق دو یا چند عدد صحیح

۱. دو یا چند عدد صحیح هم علامت جمع می شوند با علامت مشترک.

**مثال:**

$$7 + 10 = 17$$

$$-7 - 18 = -25$$

$$1 + 9 + 13 + 4 =$$

$$-1 - 22 - 3 - 14 =$$

۲. دو یا چند عدد صحیح مختلف علامت از هم کم می شوند با علامت عدد بزرگتر.

$$-6 + 10 = 4$$

$$12 - 19 = -7$$

$$-30 + 45 - 15 =$$

$$7 - 19 + 21 =$$

**مثال:**

## اولویت عملیات ها در ریاضی

به طور کلی در تمریناتی که از پرانتز، گروه یا آکلاد، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم استفاده می شود، اولویت محاسبه به صورت زیر می باشد:

۱- پرانتز یا گروه؛ حاصل را از داخلی ترین پرانتز یا گروه بدست آورید.

۲- ضرب و تقسیم؛ از سمت چپ به راست محاسبه کنید. یعنی در عبارت ریاضی تشکیل شده از چند عمل دو تایی، از سمت چپ به راست عبارت را بدست آورید.

۳- جمع و تفریق؛ از سمت چپ به راست محاسبه نمایید.

برای درک بهتر این مساله می توانید، به نحوه محاسبه مثال زیر دقت کنید.

$$= 12 \div (3 + (20 - 5) + 4 \times 2) \text{ الف}$$

۱. ابتدا حاصل داخلی ترین پرانتز یا گروه را محاسبه نمایید.

$$20 - 5 = 15$$

$$15 + 3 = 18$$

۲. حاصل پرانتز دوم را بدست آورید.

$$4 \times 18 = 72$$

۳. از چپ به راست ضرب و بعد تقسیم را انجام دهید.

$$72 \div 12 = 6$$

$$2 + 6 = 8$$

۴. از چپ به راست جمع را انجام دهید.

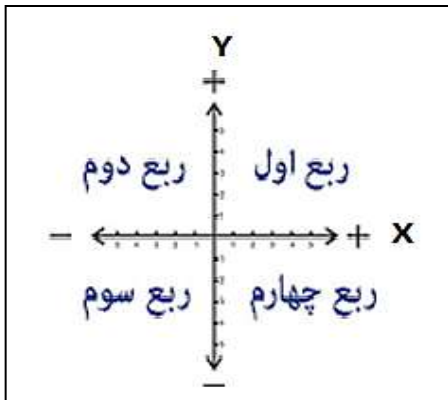
$$= 6 \div (3 + (15 - 20) + 5 - 3) \text{ ب}$$





## دستگاه محورهای مختصات

از عمود شدن دو محور اعداد، دستگاه مختصات تشکیل می شود. که محل برخورد آنها را مبدا مختصات یا نقطه O گویند. این دو محور صفحه را به چهار ناحیه یا ربع تقسیم می کند.



محور افقی محور طول یا X نام دارد.

محور عمودی محور عرض یا Y نام دارد.

چهار ناحیه ای که دو محور عمود بر هم ایجاد می کنند عبارتند از:

**ربع اول:** نقاطی که در ربع اول قرار دارند دارای طول و عرض مثبت هستند.

**ربع دوم:** نقاطی که در ربع دوم قرار دارند دارای طول منفی و عرض مثبت هستند.

**ربع سوم:** نقاطی که در ربع سوم قرار دارند دارای طول و عرض منفی هستند.

**ربع چهارم:** نقاطی که در ربع چهارم قرار دارند دارای طول مثبت و عرض منفی هستند.

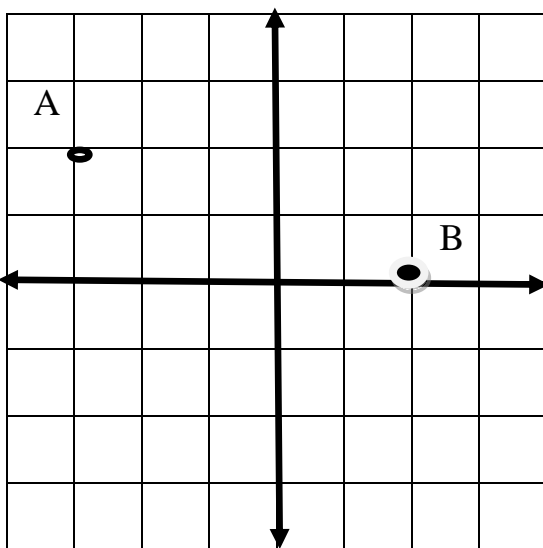
**نکته:** برای به دست آوردن مختصات نقطه از مبدا مختصات، اول طول (افقی) سپس عرض (عمودی) را می شماریم.

**نکته:** مختصات نقطه و بردار را به صورت  $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  نشان می دهند که عدد بالا، طول و عدد پایین، عرض مختصات نامیده می شوند.

**نکته:** نقاطی که روی محور طول ها قرار داشته باشند عرض آنها صفر و نقاطی که روی محور عرض ها قرار داشته باشند طول آنها صفر است.

**تمرین:** با توجه به دستگاه مقابل:

الف) مختصات نقاط A و B را بنویسید.



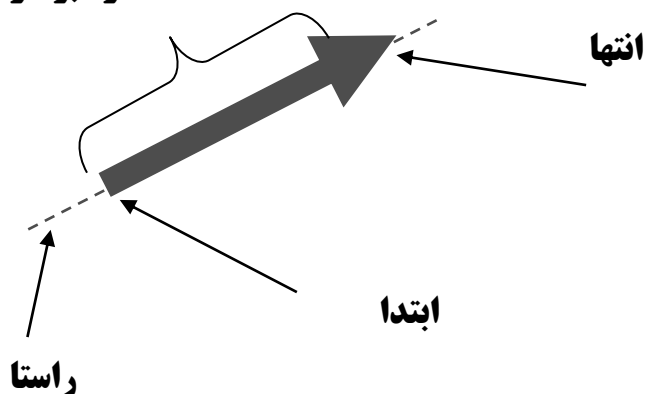
$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ب) نقاط  $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$  و  $D = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$  را روی دستگاه مشخص کنید.

## بردار

**تعریف بردار:** بردار پاره خط جهت داری است که دارای اندازه، ابتدا و انتها و راستا باشد.

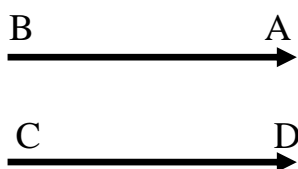
اندازه بردار



**نکته:** بردار را با دو حرف از حروف بزرگ انگلیسی یا با یک حرف کوچک نامگذاری می کنند.

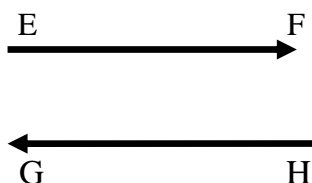
$\overrightarrow{AB}$  یا  $\vec{a}$

**دو بردار مساوی:** دو بردار را مساوی گویند هرگاه هم اندازه و هم راستا و هم جهت باشند.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

**دو بردار قرینه:** دو بردار را قرینه گویند هرگاه هم اندازه و هم راستا باشند ولی هم جهت نباشند.



$$\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{GH}$$

**نکته:** حاصل جمع هر بردار با بردار قرینه اش، برابر با بردار صفر است.

## مختصات بردار

برای به دست آوردن مختصات یک بردار از ابتدای بردار، اول طول و سپس عرض را می شماریم.

**نکته:** برای نوشتن جمع متناظر یک بردار از رابطه ی زیر استفاده می کنیم:

مختصات انتهای بردار = مختصات بردار + مختصات ابتدای بردار

مثلا برای  $\overrightarrow{AB}$  داریم:

$$A + \overrightarrow{AB} = B$$

**تمرین:** با توجه به دستگاه مختصات زیر:

الف) مختصات نقاط A و B را بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ب) مختصات  $\vec{AB}$  را بنویسید.

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ج) جمع متناظر با  $\vec{AB}$  را بنویسید.

$$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

**چند نکته مهم:**

۱. قرینه هر بردار نسبت به محور طول ها، عرض بردار قرینه می شود.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور طول ها}} \vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

۲. قرینه هر بردار نسبت به محور عرض ها، طول نقطه قرینه می شود.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض ها}} \vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

۳. قرینه هر بردار نسبت به مبدا مختصات، طول و عرض نقطه هر دو قرینه می شوند.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدا مختصات}} \vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

**جمع و تفریق مختصات**

در جمع و تفریق مختصات، طول با طول و عرض با عرض جمع می شود.

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

## اعداد گویا

شمارنده ها یا مقسوم علیه های یک عدد: اعدادی هستند که عدد مورد نظر ما بر همه آنها بخش پذیر باشد.

$$\{1, 3, 9\}$$

مثال: شمارنده های عدد ۹

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

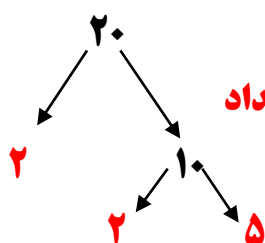
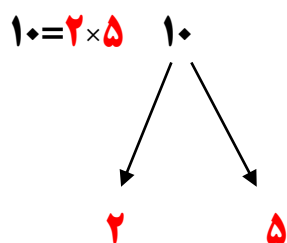
مثال: شمارنده های عدد ۱۲

تمرین ۱: شمارنده های اعداد ۱۸ و ۳۰ و ۴۲ را بنویسید.

تمرین ۲: شمارنده های اول اعداد ۱۲ و ۱۸ را بنویسید.

**تجزیه اعداد:** برای بدست آوردن شمارنده های اول یک عدد، آن را تجزیه می کنیم. یکی از روش های تجزیه، نمودار درختی است که در این روش هر عدد به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشته می شود و تا جایی نمودار ادامه پیدا می کند که دیگر نتوان آن عدد را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشت.

مثال: شمارنده های اول اعداد ۱۰ و ۲۰ را به کمک نمودار درختی پیدا کنید.



پس شمارنده های اول اعداد ۱۰ و ۲۰ اعداد ۲ و ۵ هستند.

تمرین: شمارنده های اول ۲۴ و ۴۲ و ۳۶ را به کمک نمودار درختی پیدا کنید.

برای ساده کردن کسر ها می توان اعداد را تجزیه کرد. سپس شمارنده های مشترک دو عدد را خط زد.

$$\frac{12}{18} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3}$$

## روش های بدست آوردن بزرگترین شمارنده (مقسوم علیه) مشترک دو عدد (ب. م. م)

۱. روش نوشتن مقسوم علیه ها: در این روش ابتدا شمارنده های هر دو عدد را نوشته و سپس شمارنده های مشترک آنها را می نویسیم. و در نهایت بزرگترین شمارنده مشترک را مشخص می کنیم.

مثال: بزرگترین شمارنده مشترک دو عدد ۱۲ و ۳۰ را به روش نوشتن شمارنده های دو عدد بدست آورید.

$$۱۲ \text{ و } ۶ \text{ و } ۴ \text{ و } ۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱ : \text{شمارنده های } ۱۲$$

$$۳۰ \text{ و } ۱۵ \text{ و } ۱۰ \text{ و } ۶ \text{ و } ۵ \text{ و } ۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱ : \text{شمارنده های } ۳۰$$

$$۶ \text{ و } ۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱ : \text{شمارنده های مشترک } ۱۲ \text{ و } ۳۰$$

$$۶ : \text{بزرگترین شمارنده مشترک } ۱۲ \text{ و } ۳۰$$

بزرگترین شمارنده مشترک (ب. م. م) دو عدد را بصورت زیر نمایش می دهیم:

$$۶ = (۱۲ \text{ و } ۳۰)$$

۲. روش تجزیه: برای به دست آوردن ب. م. م دو عدد به روش تجزیه طبق مراحل زیر عمل می کنیم.  
الف) دو عدد را تجزیه می کنیم.

ب) دو عدد را به صورت ضرب شمارنده های اول می نویسیم.

ج) شمارنده های مشترک در هم ضرب می کنیم.

مثال: ب. م. م دو عدد ۴۸ و ۲۰ را از روش تجزیه به دست آورید.

$$۲۰ = ۲ \times ۲ \times ۵$$

$$۴۸ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳$$

$$۴ = ۲ \times ۲ = (۲۰ \text{ و } ۴۸)$$

تمرین: ب. م. م دو عدد ۲۴ و ۴۲ را از روش تجزیه به دست آورید.

## نکاتی در مورد (ب.م.م) اعداد:

۱. از (ب.م.م) اعداد برای ساده کردن استفاده می شود.
۲. (ب.م.م) هر عدد با یک، برابر یک می باشد.
۳. (ب.م.م) هر عدد با خودش، برابر همان عدد می باشد.
۴. (ب.م.م) دو عدد اول مختلف، برابر با یک می باشد.
۵. اگر عددی بر عدد دیگر بخشپذیر باشد ب.م.م آن دو عدد برابر با عدد کوچکتر می باشد.  
 $6 = (6, 18)$
۶. ب.م.م دو عدد متوالی (پشت سر هم) یک است.

## مضرب های طبیعی یک عدد

اگر یک عدد را به ترتیب در اعداد طبیعی ضرب کنیم مضرب های طبیعی آن عدد بدست می آید.

**مثال:** مضرب های طبیعی اعداد ۴ و ۱۵ را بنویسید.

{... و ۶۰ و ۴۵ و ۳۰ و ۱۵} : مضرب های طبیعی ۱۵      {... و ۱۶ و ۱۲ و ۸ و ۴} : مضارب طبیعی ۴

**نکته:** اولین (کوچکترین) مضرب طبیعی هر عدد، خودش ولی بزرگترین آن معلوم نیست.

**تمرین ۱:** هفتمین مضرب ۱۲ چه عددی است؟

**تمرین ۲:** آیا عدد ۱۴۳ مضرب ۳ است؟ چرا؟

**تمرین ۳:** سه مضرب مشترک ۵ و ۷ را بنویسید.

## روش های بدست آوردن کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عدد

### ۱. روش نوشتن مضرب های دو عدد:

مثال: ک.م.م دو عدد ۶ و ۱۵ را از روش نوشتن مضرب های دو عدد پیدا کنید.

مضرب های عدد ۱۵: {۱۵ و ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ و ...}

مضرب های عدد ۶: {۶ و ۱۲ و ۱۸ و ۲۴ و ۳۰ و ۳۶ و ۴۲ و ۴۸ و ۵۴ و ۶۰ و ...}

{۳۰}: کوچکترین مضرب مشترک ۱۵ و ۶  $\Rightarrow$  {۳۰ و ۶۰ و ۹۰ و ...}: مضرب های مشترک ۱۵ و ۶

کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عدد ۱۵ و ۶ را به صورت زیر نمایش می دهند.

$$[۱۵ و ۶] = ۳۰$$

۲. روش تجزیه: دو عدد را به صورت ضرب اعداد اول نوشته سپس اعداد اول **مشترک** و **غیر مشترک** را در هم ضرب می کنیم.

مثال: ک.م.م دو عدد ۳۶ و ۴۸ را به روش تجزیه به دست آورید.

$$۳۶ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ \quad ۴۸ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \quad [۳۶ و ۴۸] = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۳$$

### نکاتی در باره ک.م.م اعداد:

۱. از (ک.م.م) برای مخرج مشترک کسرها استفاده می شود.
۲. (ک.م.م) هر عدد با یک برابر با خود عدد است.  $[۱۴ و ۱۴] = ۱۴$
۳. (ک.م.م) هر عدد با خودش برابر با همان عدد می باشد.  $[۱۵ و ۱۵] = ۱۵$
۴. (ک.م.م) دو عدد اول مختلف برابر با حاصل ضرب آن دو عدد می باشد.  $[۱۱ و ۳] = ۳۳$
۵. اگر عددی بر عدد دیگر بخشپذیر باشد (ک.م.م) آنها برابر با عدد بزرگتر می باشد.  $[۱۲ و ۴] = ۱۲$



## تمرین

۱. درستی  یا نادرستی  عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) تعداد شمارنده های هر عدد بزرگتر از یک همیشه زوج است.

ب) عدد ۶۰ دارای سه شمارنده اول است.

پ) هر عدد طبیعی بزرگتر از یک حداقل یک شمارنده اول دارد.

ت) عدد ۷ تنها شمارنده اول عدد ۲۱ است.

ث) ۹۱ عددی اول است.

ج) هر عدد شمارنده خودش است.

۲. در جای خالی عدد یا کلمه مناسب بنویسید.

الف) عدد ۱۴۴ دارای ..... شمارنده اول است.

ب) کوچکترین شمارنده هر عدد ..... است.

پ) عدد ۵ یک ..... عدد ۳۰ است.

ث) عدد طبیعی ..... شمارنده اول ندارد.

ج) مجموع دو عدد اول اگر فرد باشد یکی از آنها عدد ..... است.

چ) ک.م.م دو عدد اول برابر با ..... آنها است.

ح) اگر عددی بر عدد دیگر بخش پذیر باشد ب.م.م آنها ..... و ک.م.م آنها ..... است.

۳. تساوی های زیر را کامل کنید. (به روش تجزیه)

$$(52, 20) =$$

$$[52, 20] =$$

$$(108, 72) =$$

$$[108, 72] =$$

## عدد گویا

گویا صفت فاعلی از مصدر گفتن می باشد و در ریاضی هر عدد کسری مانند یا هر عددی که بتوان آن را به شکل یک کسر نوشت مانند  $2- , 0 , +3 , -3/2 , 0/25$  که به ترتیب به شکل کسرهای نوشته می شوند، را یک عدد گویا می نامیم.

## مجموعه عددهای گویا

این مجموعه شامل تمام اعداد گویا است، این مجموعه را با حرف Q که حرف اول کلمه Quotient است، نمایش می دهند.

اعداد صحیح، طبیعی و اعداد حسابی همه زیر مجموعه‌ای از اعداد گویا هستند زیرا مخرج تمامی اعداد طبیعی یک است و علامت آن‌ها مثبت در نتیجه همه آنان کسر هستند. اعداد اعشاری را می‌توان جزو اعداد گویا به حساب آورد زیرا هر عدد اعشاری را می‌توان به صورت کسری نوشت. اعداد گویا با علامت مثبت بزرگتر از اعداد گویا با علامت منفی هستند. اعداد گویا از منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت ادامه دارند.

**نکته ۱:** بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد وجود دارد.

**نکته ۲:** مجموعه اعداد گویا را نمی‌توان با نوشتن اعضا مشخص کرد و فقط باید آنها را به صورت کلامی یا به صورت نمادین بیان کرد.

**نکته ۳:** کسری که صورتش صفر و مخرجش عدد باشد همان صفر است و متعلق به اعداد گویا است.

**نکته ۴:** کسری که صورتش عدد و مخرجش صفر باشد در ریاضی نا معین و تعریف نشده است.

## جمع و تفریق کسرها

برای جمع و تفریق کسرها به ترتیب کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

۱. اگر در عبارتی پرانتز وجود داشته باشد، پرانتز را حذف می‌کنیم.

پرانتز را چطوری حذف می‌کنیم؟

علامت قبل از پرانتز را در علامت داخل پرانتز ضرب می‌کنیم و بعد پرانتز را برمی‌داریم.

۲. بین دو تا عدد مخرج مشترک می‌گیریم. سپس یکی از مخرج‌ها را نوشته و صورتها را برطبق مطالبی که

در جمع و تفریق اعداد صحیح یاد گرفتیم، جمع یا تفریق می‌کنیم.

**تمرین:** حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$\frac{7}{12} + \frac{1}{18} =$$

$$\frac{5}{36} - \frac{1}{42} =$$

### ضرب کسرها

برای ضرب اعداد کسری ابتدا تعیین علامت کرده و صورت و مخرج را به ضرب اعداد اول تجزیه کرده و اعداد اول مشترک در صورت و مخرج را با هم ساده می کنیم و در نهایت صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم.

**تمرین:** حاصل را بدست آورید.

$$\left(+\frac{25}{12}\right) \times \left(-\frac{21}{30}\right) =$$

**معکوس یک عدد:** اگر جای اعداد صورت و مخرج یک کسر را عوض کنیم معکوس آن کسر بدست می آید.  
**نکته ۱:** حاصل ضرب هر عدد در معکوس آن برابر با یک است.

$$\frac{7}{12} \times \frac{12}{7} = 1$$

مثال:

**نکته ۲:** برای نوشتن معکوس یک عدد مخلوط، ابتدا عدد مخلوط را به کسر تبدیل کرده سپس معکوس می کنیم.

$$5\frac{3}{5}$$

**تمرین:** معکوس عدد مقابل را بنویسید.

### تقسیم کسرها

برای تقسیم اعداد کسری، کسر اول را در معکوس کسر دوم ضرب کرده سپس آن را تا حد امکان ساده می کنیم. بعد صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم.

**تمرین:** حاصل را بدست آورید.

$$\frac{5}{18} \div \frac{15}{12} =$$

## حجم و سطح

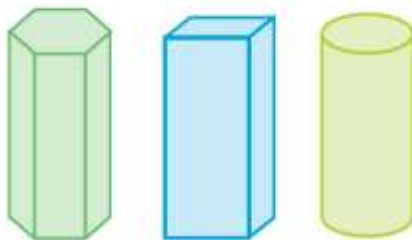
حجم را می توان به دو دسته هندسی و غیر هندسی تقسیم کرد.

حجم های هندسی: به حجم هایی که شکل مشخص و تعریف شده ای دارند، حجم هندسی می گویند. حجم های هندسی به سه دسته تقسیم می شوند:

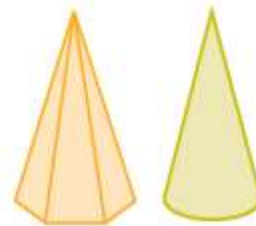
۱- حجم های هرمی      ۲- حجم های منشوری      ۳- حجم های کروی



حجم های کروی



حجم های منشوری



حجم های هرمی

## حجم های منشوری

**منشور:** نام شکلی است که دو قاعده موازی دارد، که این قاعده ها، دو چند ضلعی مساوی هستند و به وسیله پاره خط هایی به هم متصل می شوند.

حجم های منشوری بین دو صفحه موازی قرار می گیرند. منشور را با تعداد پهلوهای آن نام می برند.

**قاعده منشور:** دو سطح بالا و پایین منشور را که دو چند ضلعی کاملاً مساوی و موازی هستند، قاعده منشور می گویند.

**وجه های جانبی:** بدنه یک منشور از تعدادی مستطیل تشکیل شده است که به هر کدام از آنها وجه های

جانبی منشور یا پهلوهای منشور می گویند.

به بیان ساده تر به سطح های اطراف منشور، وجه های جانبی منشور می گویند.

**یال منشور:** محل برخورد سطح ها، یال نام دارد.

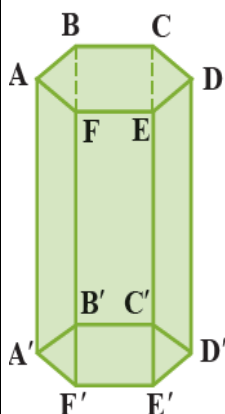
به بیان ساده تر لبه های منشور، یال نام دارند.

تعداد یال های منشور سه برابر تعداد اضلاع قاعده منشور است.

**راس منشور:** به نقطه برخورد یال ها راس یا به نقطه برخورد هر سه

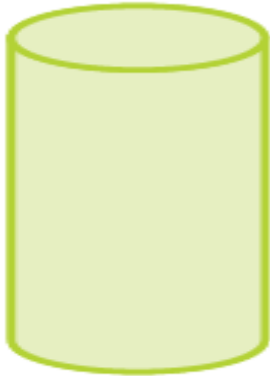
سطح، راس می گویند.

**ارتفاع منشور:** فاصله بین دو قاعده منشور، ارتفاع منشور می باشد.

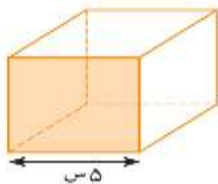
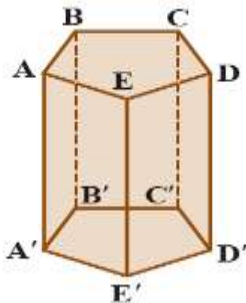


## استوانه:

اگر روی دایره منشوری ساخته شود، آن منشور **استوانه** نامیده می شود.  
اگر تعداد ضلع های یک چند ضلعی خیلی زیاد باشد، این چند ضلعی به شکل دایره نزدیک می شود، پس می توان گفت **دایره یک چند ضلعی با بی نهایت ضلع است.**  
**نکته:** استوانه منشوری است که بی شمار یال و راس دارد و قاعده آن دایره ای شکل است.



**منشور n پهلو:** منشوری را که قاعده های آن یک n ضلعی منتظم یا غیر منتظم باشد، منشور n پهلو می گوئیم.  
**نکته:** در یک منشور n پهلو، قاعده یک n ضلعی است. مثلاً قاعده یک منشور ده پهلو، ده ضلعی است.  
**نکته:** هر منشور n پهلو،  $2n$  راس،  $3n$  یال دارد. مثلاً یک منشور ۵ پهلو، ۱۰ راس و ۱۵ یال دارد.

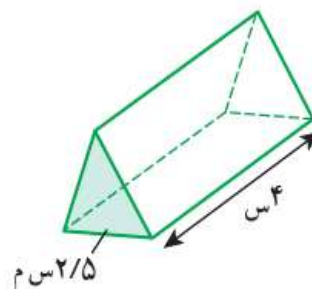
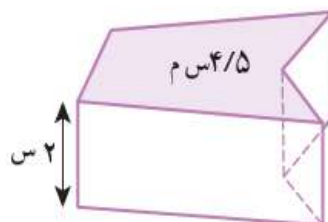
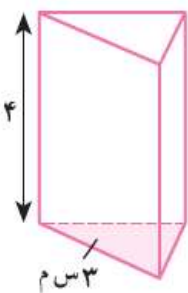


## محاسبه حجم های منشوری

**نکته:** حجم مکعبی که طول هر یال آن  $a$  باشد، از رابطه زیر

به دست می آید:  $V = a \times a \times a$

**نکته:** اگر مساحت قاعده منشور  $S$  و ارتفاع آن  $h$  باشد، آنگاه حجم منشور از رابطه  $V = S \times h$  به دست می آید.



## مساحت جانبی و مساحت کل منشور

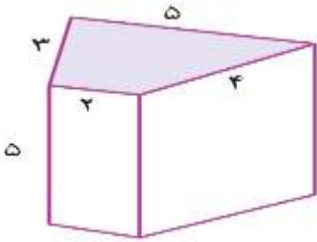
**مساحت جانبی منشور:** مجموع مساحت های همه ی وجه های جانبی منشور را مساحت جانبی منشور می گوئیم.

**نکته:** هر وجه جانبی منشور، یک مستطیل است.

**نکته:** اگر مساحت جانبی منشور را با  $S$  و محیط قاعده آن را با  $P$  و ارتفاع آن را با  $h$  نمایش دهیم، آنگاه:

$$S=P \times h$$

یعنی مساحت جانبی منشور برابر است با حاصل ضرب محیط قاعده در ارتفاع آن.

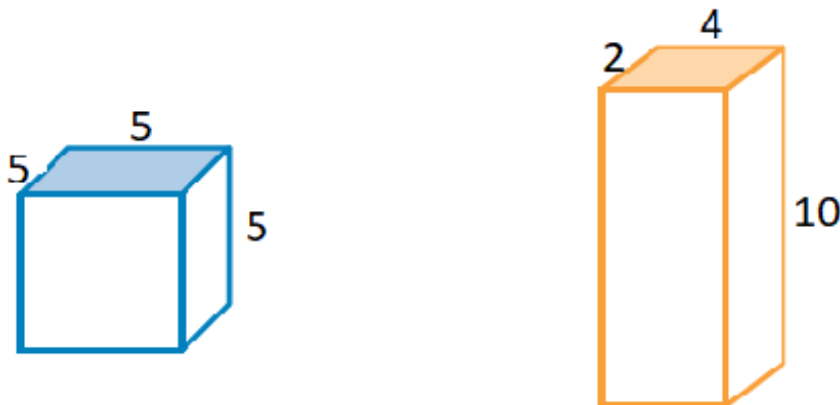


**نکته:** اگر مساحت تمام وجه های جانبی را به دست آوریم و سپس آنها را با یکدیگر جمع کنیم، مساحت جانبی منشور به دست می آید و یا می توان با استفاده از گسترده منشور مساحت جانبی منشور را به دست آورد.

**مساحت کل منشور:** مجموع مساحت جانبی منشور با مجموع مساحت های دو قاعده منشور را مساحت کل منشور می گوئیم.

**نکته:** مساحت کل مکعب مستطیل با ابعاد  $a, b, c$  برابر با:  $S=2(ab + ac + bc)$

**نکته:** مساحت جانبی مکعب به ضلع  $a$  برابر:  $4a \times a$  و مساحت کل مکعب به ضلع  $a$  برابر:  $6a \times a$



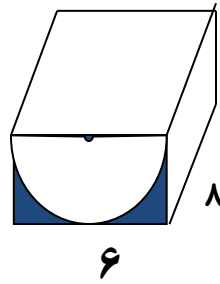
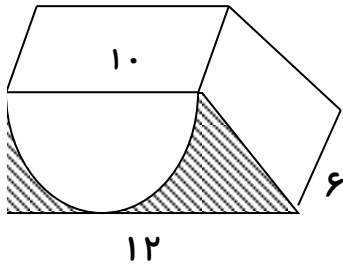
## نمونه سوالات مساحت و حجم

**تمرین ۱:** حجم و مساحت جانبی و مساحت کل استوانه ای به شعاع قاعده ۳ سانتی متر و ارتفاع ۱۰ سانتی متر را بدست آورید.

**تمرین ۲:** در جای خالی عدد یا کلمه مناسب بنویسید.

- (الف) اجسام حجم دار در حالت کلی ..... و ..... هستند.
- (ب) حجم های هندسی به شکل های ..... و ..... هستند.
- (پ) هر منشور دارای ..... مساوی و بدنه منشور از ..... تشکیل شده است.
- (ت) بدنه هر منشور را ..... منشور می نامیم.
- (ث) در هر منشور محل برخورد هر دو سطح را ..... می نامیم.
- (ج) در هر منشور به محل برخورد سه سطح را ..... می نامیم.
- (چ) منشوری که قاعده آن دایره باشد ..... نامیده می شود.
- (ح) یک منشور که قاعده آن مثلث باشد را منشور ..... می نامیم.
- (خ) یک منشور ۸ پهلو دارای ..... راس و ..... یال می باشد.
- (د) اگر منشوری دارای ۲۴ رأس باشد دارای ..... یال است.
- (ذ) یک منشور ..... دارای ۵۴ یال است.
- (ر) حجم هر منشور برابر با ..... ضربدر ..... است.
- (ز) مساحت جانبی هر منشور برابر با ..... ضربدر ..... است.
- (ژ) مساحت کل هر منشور برابر با ..... + ..... است.
- (س) منشوری که تمام سطح های آن مربع باشد ..... نام دارد.
- (ش) مساحت جانبی مکعبی به ضلع  $a$  برابر با ..... است.
- (ص) مساحت کل مکعبی به ضلع  $a$  برابر با ..... است.

تمرین ۳: حجم شکل های زیر را بدست آورید.





## فرمول مساحت و محیط و حجم اشکال هندسی

$$\text{یک ضلع} \times \text{خودش} = \text{مساحت مربع}$$

$$\text{یک ضلع} \times 4 = \text{محیط مربع}$$

$$\text{طول} \times \text{عرض} = \text{مساحت مستطیل}$$

$$2 \times (\text{طول} + \text{عرض}) = \text{محیط مستطیل}$$

$$2 \div (\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}) = \text{مساحت مثلث}$$

$$\text{مجموع سه ضلع} = \text{محیط مثلث}$$

$$2 \div (\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}) = \text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع}$$

$$\text{یک ضلع} \times 3 = \text{محیط مثلث متساوی الاضلاع}$$

$$2 \div (\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}) = \text{مساحت مثلث متساوی الساقین}$$

$$\text{مجموع سه ضلع} = \text{محیط مثلث متساوی الساقین}$$

$$2 \div (\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}) = \text{مساحت مثلث قائم الزاویه}$$

$$\text{مجموع سه ضلع} = \text{محیط مثلث قائم الزاویه}$$

$$2 \div [(\text{ارتفاع} \times (\text{قاعده بزرگ} + \text{قاعده کوچک}))] = \text{مساحت ذوزنقه}$$

$$\text{مجموع چهار ضلع} = \text{محیط ذوزنقه}$$

$$2 \div (\text{قطر بزرگ} \times \text{قطر کوچک}) = \text{مساحت لوزی}$$

$$\text{یک ضلع} \times 4 = \text{محیط لوزی}$$

$$\text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = \text{مساحت متوازی الاضلاع}$$

$$\text{مجموع دو ضلع متوالی} \times 2 = \text{محیط متوازی الاضلاع}$$

$$\text{عدد پی} \left(\frac{3}{14}\right) \times \text{شعاع} \times \text{شعاع} = \text{مساحت دایره}$$

$$\text{عدد پی} \left(\frac{3}{14}\right) \times \text{قطر} = \text{محیط دایره}$$

شعاع به توان دو  $\times 3/14 \times 4 =$  مساحت کره

شعاع به توان سه  $\times 3/14 \times$  چهار سوم = حجم کره

$3/14 \times$  ( نصف قطر بزرگ  $\times$  نصف قطر کوچک ) = مساحت بیضی

یک ضلع  $\times$  تعداد اضلاعش = محیط چند ضلعی منتظم

طول  $\times$  عرض  $\times$  ارتفاع = حجم مکعب مستطیل

(یک ضلع به توان سه) یا (ارتفاع  $\times$  مساحت یک وجه) = حجم مکعب مربع

ارتفاع هرم  $\times$  یک سوم مساحت قاعده = حجم هرم

ارتفاع  $\times$  مساحت قاعده = حجم استوانه

ارتفاع  $\times$  محیط قاعده = مساحت جانبی استوانه

مساحت جانبی + مساحت دو قاعده = مساحت کل استوانه

مجموع مساحت های سطوح جانبی = مساحت جانبی منشور

مجموع مساحت دو قاعده + مجموع مساحت سطوح جانبی = مساحت کلی منشور

یک سوم  $\times$  ( مساحت قاعده  $\times$  ارتفاع ) = حجم مخروط

## حل مسئله

چگونه یک مسئله را حل کنیم؟

۱. فهم مسئله یعنی مسئله چه اطلاعاتی به ما داده است و چه چیزی از ما می خواهد.
۲. انتخاب راهبرد مناسب.
۳. حل مسئله.
۴. بازگشت به عقب.

## راهبردهای حل مسئله

۱. رسم شکل.
۲. الگو سازی (جدول نظام دار).
۳. حذف حالت های نامطلوب.
۴. الگویابی.
۵. حدس و آزمایش.
۶. زیر مسئله.
۷. حل مسئله ساده تر.
۸. روش نمادین (معادله).

## ۱. راهبرد رسم شکل

برای حل بعضی از مسائل می توان یک شکل ساده رسم کرد و آن را حل کرد. لازم نیست نقاشی شما خیلی پیچیده باشد.

**مثال:** یک باغچه مستطیل شکل به طول ۱۰ متر و عرض ۵ متر است. اگر به فاصله یک متر از لبه ی باغچه دور تا دور آن را نرده بکشیم. چند متر نرده احتیاج داریم؟

## ۲. راهبرد الگو سازی ( تفکر نظام دار)

در بعضی مسئله ها لازم است همه ی حالت های ممکن را بنویسیم. برای اینکه حالتی از قلم نیفتد. لازم است آنها را با نظم الگو و ترتیبی مشخص بنویسیم. الگو سازی کمک می کند که مطمئن شویم همه ی حالت ها را نوشته ایم. بنا براین در مسئله هایی که لازم است همه ی جواب ها و پاسخ های ممکن را بنویسیم از این راهبرد استفاده می کنیم.

**مثال:** دو عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب آن ها ۲۴ و حاصل جمع آن ها کمترین مقدار باشد.

## ۳. راهبرد الگویابی

در ریاضی با دو نوع الگوی عددی و یا هندسی مواجه می شویم. کشف الگو رابطه و نظم موجود در بین دنباله های عددی و یا هندسی کمک می کند تا بتوانیم خواسته مسئله را پاسخ دهیم. این راهبرد در مسئله هایی کاربرد دارد که بین شکل ها و یا عددها الگو و رابطه ی خاصی وجود داشته باشد.

**مثال:** سه عدد بعدی الگوهای زیر را بنویسید. رابطه ی بین عددها را توضیح دهید.

۱, ۴, ۹, ۱۶,      ,      ,  
۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳,      ,      ,

## ۴. راهبرد حذف حالت های نامطلوب

با توجه به شرایط و اطلاعات مسئله می توانیم حالت های نامطلوب و نادرست را کنار بگذاریم تا با حذف آنها پاسخ مسئله و یا همان حالت های مطلوب به دست آید. برای پیدا کردن حالت های ممکن می توانیم از راهبرد الگوسازی استفاده کنیم. ابتدا فهرستی از تمام حالت ها به دست می آوریم. سپس با توجه به شرایط گفته شده در مسئله حالت های نامطلوب را حذف می کنیم.

**مثال:** مجموع سن سه نفر ۱۴ سال و حاصل ضرب سن آنها ۷۰ سال است. سن کوچکترین فرد این سه نفر چند سال است؟

## ۵. راهبرد حدس و آزمایش

ممکن است یک مسئله روش و راه حل مستقیمی نداشته باشد و یا رسیدن به جواب طولانی و دشوار باشد ما می توانیم با یک روش منطقی و منظم پاسخ احتمالی را حدس بزنیم. سپس با توجه به شرایط گفته شده در مسئله، حدس خود را بررسی و با توجه به نتیجه بدست آمده حدس بعدی را بزنیم تا کم کم به پاسخ مسئله نزدیک شویم.

**مثال:** ۲۰ دستگاه دوچرخه و سه چرخه در یک پارکینگ وجود دارد. اگر تعداد کل چرخ های آنها ۴۵ عدد باشد. چند دوچرخه و چند سه چرخه در پارکینگ وجود دارد؟

## ۶. راهبرد زیر مسئله

مسئله ی پیچیده و چند مرحله ای را به مسئله ساده و مرحله به مرحله تبدیل کنیم. فهرستی از این زیر مسئله ها را درست کرده سپس به ترتیب به آنها پاسخ می دهیم. اگر ترتیب زیر مسئله ها را درست تشخیص داده باشیم حل هر زیر مسئله به حل مسئله ی بعدی کمک می کند تا در نهایت به خواسته ی اصلی برسیم.

**مثال:** احمد ۲۰۰۰۰ تومان پول دارد. او می خواهد ۸ دفترچه و با بقیه پولش مداد بخرد. قیمت هر دفترچه ۱۳۵۰ تومان و قیمت هر مداد ۳۰۰ تومان است. او چند مداد می تواند بخرد و چه قدر پول برایش باقی می ماند؟

**الف:** ابتدا باید قیمت ۸ دفترچه را حساب کنیم.

**ب:** بعد از خرید دفترچه چه قدر پول برایش باقی می ماند؟

**ج:** با این پول باقی مانده، چند مداد ۳۰۰ تومانی می تواند بخرد؟

**د:** چه قدر پول برایش باقی می ماند؟

## ۷. راهبرد حل مسئله ساده تر

برای بعضی از مسئله ها ابتدا باید مسئله ساده تر و مرتبط با آن را حل کنیم. سپس با استفاده از نتیجه و پاسخ ساده شده جواب مسئله اصلی را بدست آوریم. برای ساده کردن مسئله می توان از عددهای تقریبی یا عدد های کوچکتر استفاده کرد. برای نتیجه گیری و پیدا کردن پاسخ مسئله اصلی از راهبرد الگویابی استفاده می کنیم و الگوی کشف شده در مسئله ساده را به مسئله ی اصلی مرتبط می کنیم.

**مثال:** حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024} =$$

## ۸. راهبرد روش های نمادین

بسیاری از مسئله ها را می توان به کمک نمادهای جبری به یک معادله تبدیل کرد. در بعضی از مسئله ها نیز ممکن است از مدل سازی هندسی استفاده کنیم. تبدیل مسئله به شکل هندسی و حل هندسی آن نوعی روش نمادین یا مدل سازی به شمار می رود.

**مثال:** احمد ۳۰۰۰۰ تومان پول داشت. او ۴ دفترچه خرید و ۲۰۰۰ تومان برایش باقی ماند. قیمت هر دفترچه چه قدر است؟

**تمرین:** هر یک از مسئله های زیر را به کمک یکی از راهبردهای حل مسئله حل کنید.

(۱) دو عدد صحیح پیدا کنید که حاصل ضرب آنها ۱۸ و حاصل جمع آنها کمترین مقدار باشد.

(۲) هنگام تولد فاطمه مادرش ۲۴ ساله بود اگر مجموع سن آنها برابر ۷۶ سال باشد سن هر یک چند سال است؟

(۳) مریم  $\frac{1}{3}$  پول خود را به خواهرش مینا و  $\frac{2}{5}$  بقیه آن را به مینو داد و ۶۰۰۰ تومان برایش باقی ماند. تمام پول مریم چقدر است؟

(۴) پس انداز هفتگی زهرا ۲۴۰۰ تومان است. او حساب کرد که اگر ۷ هفته پس انداز کند با پول خود می تواند نصف پول کلاس تقویتی خود را بپردازد. پول کلاس تقویتی او چقدر است؟

(۵)  $\frac{1}{3}$  دانش آموزان کلاسی به کارهای عملی فناوری و نصف بقیه آنها به کار پژوهشی ریاضی و ۱۲ نفر به کار آزمایشگاهی علوم علاقه مند هستند. این کلاس چند دانش آموز دارد؟

(۶) حاصل ضرب ۳ عدد برابر با ۷۲ و حاصل جمع آنها برابر با ۱۴ می باشد. آن اعداد کدامند؟

(۷) مجموع دو عدد برابر با ۷۶ می باشد. اگر یکی ۲۴ واحد بیشتر از دیگری باشد، آن دو عدد کدامند؟